MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DERIVATA MATERIALE

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}u + \frac{\partial A}{\partial y}v + \frac{\partial A}{\partial z}w = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla A$$

(∇A: gradiente)

- $\frac{\partial A}{\partial t}$ → TERMINE NON STAZIONARIO
- $\vec{V}\cdot\nabla A$ → TERMINE CONVETTIVO

TERMINE non STAZIONARIO → VARIAZIONE di A nel tempo (se è stat. $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$)

TERM. CONVETTIVO → VARIAZIONE di A nel campo considerato

Es. TEMP. →
- raffreddamento di media il mare → 1°C/h
- il elevato alla spostamento → 1°C / 100 Km

Se viaggio per 600 Km a 60 Km/h → (10 ORE)

$$T_{non\ staz} = \frac{1°C}{h}\cdot 10\,h = \boxed{10°C} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{TEM.} \\ \text{CONV.} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1°C}{100\,Km}\cdot 600\,Km = \boxed{6°C}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{Dt} = 10°C + 6°C = \boxed{16°C}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TRAIETTORIA → luogo geometrico dei punti occupati dalla particella nell'intervallo di tempo → $\int_0^t u(x,t)\,dt$; $\int_0^t v(x,t)\,dt$.

LINEE di CORRENTE → linee che ad un certo istante t sono $\perp$ in ogni punto al vettore velocità del fluido

LINEE di FUMO → luogo geometrico ad un istante t delle particelle che hanno attraversato un punto P nell'istante in un istante precedente

Eq. di Moto → BILANCIO DI: { MASSA; QUANTITA' DI MOTO; ENERGIA } RIFERITI AD UN VOLUME MATERIALE
↳ ovvero che segue le particelle che lo compongono

Devo esprimerle in termini EULERIANI (volumi fissi)

Th. del TRASPORTO

$V^*(t^*)$ = config. di riferimento $V(t)$ = config. ATTUALE
↳ X_i — $i=(1,2,3)$ ↳ x_i $i: 1,2,3$

$dV = J\,dV^*$ J = JACOBIANO = operatore che mi fa passare da V^* a V
IN MODO NECESSARIO e' BIUNIVOCO

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad 0 < J < +\infty$$

SE CONSIDERO LA VARIAZIONE DI UNA PROP. $G(x_i,t)$ del volume materiale

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} G(x_i,t)\,dV \rightarrow V(t) \text{ dip. dal tempo} \rightarrow \text{è un problema}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V^*} G(x_i,t)\cdot J\,dV^* = \int_{V^*} \frac{D}{Dt}\left(G(x_i,t)\cdot J\right)dV^* =$$
↑ è posso fare perché V^* non dip. dal tempo

$$= \int_{V^*}\left[\frac{DG(x_i,t)}{Dt}J + G(x_i,t)\frac{DJ}{Dt}\right]dV^* \quad \text{con} \quad \boxed{\frac{DJ}{Dt} = J\,\mathrm{div}\,\vec{V}}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} G(x_i,t)\,dV = \int_{V^*}\left[\frac{DG(x_i,t)}{Dt}J + G(x_i,t)J\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right]dV^*$$

$$= \int_{V}\left[\frac{DG(x_i,t)}{Dt} + G(x_i,t)\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right]dV \rightarrow \text{FORMA TUTTO}$$

$\frac{DG(x_i,t)}{Dt}$ → PARTE LAGRANGIANA $G(x_i,t)\,\mathrm{div}\,\vec{V}$ → PARTE EULERIANA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Quindi diventa la

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} G\,dV = \int_{V(t)} \left(\frac{DG}{Dt}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla G + G\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right) dV \rightarrow \text{FORMA EULERIANA}$$

Se ci ricordiamo che $\mathrm{div}(G\vec{V}) = \vec{V}\cdot\nabla G + G\,\mathrm{div}\,\vec{V}$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} G\,dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \mathrm{div}(G\vec{V})\right) dV \rightarrow \text{FORMA EULERIANA CONTRATTA}$$

Applico il T. della divergenza generalizzato: $\int_{V(t)} \mathrm{div}(G\vec{V}) = \int_{S(t)} G\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} G\,dV = \int_{V} \frac{\partial G}{\partial t}\,dV + \int_{S(t)} \vec{V}G\cdot\vec{n}\,dS \rightarrow$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SIGNIFICATO → Posso considerare qualsiasi volume in cella fissa e usarlo come una "FOTOGRAFIA" istantanea al tempo t di un volume materiale

BILANCIO DI MASSA

$$m = \int_V \rho\,dV \rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\,dV = 0} \rightarrow \text{CONSERV. della MASSA}$$

UTILIZZO IL TEOR. del TRASPORTO

$$\int_{V(t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\cdot\mathrm{div}\,\vec{V}\right] dV = 0 \quad \left| \quad \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{V})\right] dV = 0 \right.$$

① ②

$$\text{e} \quad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \int_S \vec{V}\cdot\rho - \vec{n}\,dS = 0$$

③

NELLE 3 FORME
① MISTA ③ DOPO IL T. della DIV.
② EULERIANA

ovvero $\int_V \varrho \, dV = -\int_S \varrho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$ → la VARIAZIONE della massa è opposta al flusso attraverso la superficie

LEMMA DI LOCALIZZAZIONE → Se la funzione integrata è continua e l'integrale è nullo allora la funzione integrata è nulla.

Quindi: $\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \, div \vec{V} = 0$ | $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div(\varrho \vec{V}) = 0$

→ NON VALE SE CI SONO ONDE D'URTO → SONO DISCONTINUE

COROLLARIO → IL T. del TRASPORTO si è scritto nella seconda forma → a causa del BILANCIO di MASSA

Prendo $G = \varrho \cdot F$ — generica funzione

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \varrho F \, dV = \int_V \frac{D(\varrho F)}{Dt} + \varrho F \, div \vec{V} = \int_V \varrho \frac{DF}{Dt} + F \frac{D\varrho}{Dt} + \varrho F \, div \vec{V} \, dV$$

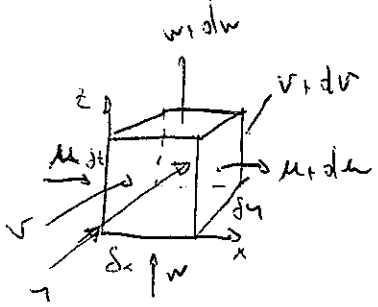
→ per la conservazione di massa

quindi $= \int_V \varrho \frac{DF}{Dt} + F\left(\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \, div \vec{V}\right) dV$

Perciò: $\boxed{\frac{D}{Dt}\int_V \varrho F \, dV = \int_V \varrho \frac{DF}{Dt} \, dV}$

MASTER COPY
Tel. 050 3312126
Cell. 388 9837745

INTERPRETAZIONE FISICA di $\operatorname{div}\vec{V}$



Deformazione di un volumetto materiale lati $dx\ dy\ dz$

$$\Delta x = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dt - u\,dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx\,dt$$

$$\Delta y = \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) dt \overbrace{\cdot\, -v\,dt}^{-v\,dt} = \frac{\partial v}{\partial t} dy\,dt$$

$$\Delta z = \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dt \overbrace{\cdot\, -w\,dt}^{-w\,dt} = \frac{\partial w}{\partial t} dz\,dt$$

$$\Delta V = (dx + \Delta x)(dy + \Delta y)(dz + \Delta z) - dx\,dy\,dz =$$

$$= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\,dt\right)\left(dy + \frac{\partial v}{\partial t} dy\,dt\right)\left(dz + \frac{\partial w}{\partial t} dz\,dt\right) - dx\,dy\,dz$$

$$= \operatorname{div}\vec{V}\, dx\,dy\,dz\,dt \overbrace{+ O(dt^2)}^{+\,O(dt^2)} = \operatorname{div}\vec{V} \cdot V\,dt \quad \rightarrow \text{trascuro i termini con } dt^2$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \operatorname{div}\vec{V}\, dt} \rightarrow \text{Quindi } \operatorname{div}\vec{V} = \text{variazione nel tempo per unità di volume del volumetto materiale}$$

Quindi $-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \operatorname{div} V \rightarrow$ $\operatorname{div} V$ deve essere uguale all'opposto della variazione istantanea di densità relativa

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745